

Exercice

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à  $2,5 \mu\text{g/mL}$ .

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où  $f(t)$  représente le taux de vasopressine (en  $\mu\text{g/mL}$ ) dans le sang en fonction du temps  $t$  (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1.
  - a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant  $t = 0$ ?
  - b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
  - c. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .  
Vérifier que pour tout nombre réel  $t$  positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

3.
  - a. Étudier le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  (en incluant la limite en  $+\infty$ ).
  - b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal?  
Quel est alors ce taux? On en donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
4.
  - a. Démontrer qu'il existe une unique valeur  $t_0$  appartenant à  $[0; 4]$  telle que  $f(t_0) = 2,5$ .  
En donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

*On admet qu'il existe une unique valeur  $t_1$  appartenant à  $[4; +\infty[$  vérifiant  $f(t_1) = 2,5$ .*

*On donne une valeur approchée de  $t_1$  à  $10^{-3}$  près :  $t_1 \approx 18,930$ .*

- b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à  $2,5 \mu\text{g/mL}$  dans le sang.